EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

IV — 15 DECEMBER 1963

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang ƒ 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs ƒ 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt ƒ 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en ƒ 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen ƒ 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

Dr. H. A. TURKSTRA

Dr. Turkstra heeft in verband met het bereiken van de zeventigjarige leeftijd in de jongste redactievergadering van Euclides de wens te kennen gegeven als redactielid af te treden.

Hij heeft sinds 1956 deel uitgemaakt van de redactie van ons maandblad, daartoe aangewezen door het bestuur van Wimecos. Van harte hopen we, dat zijn vertrek niet het einde zal betekenen van zijn actieve medewerking aan Euclides, waarin tot dusver van zijn hand artikelen verschenen over het wiskunde-onderwijs in Zuid-Afrika, over de correlatie tussen de resultaten van het rekenonderwijs op de lagere school en van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school, over het wiskunde-onderwijs ten behoeve van de niet-mathematische richtingen en over de wiskundige verdiensten van Prins Maurits.

Het is op dit ogenblik nog niet bekend, wie Dr. Turkstra zal opvolgen. In 1962 is overeengekomen, dat Wimecos, Liwenagel en de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. zo veel mogelijk in de verhouding van 2, 1, 1 in de redactie vertegenwoordigd zouden zijn. In verband hiermee zal Dr. Turkstra straks worden vervangen door een redacteur aan te wijzen door de Wiskundewerkgroep.

Namens de overige redactieleden dank ik Dr. Turkstra voor al wat hij tot dusver in het belang van ons tijdschrift heeft gedaan.

Joh. H. Wansink.

ONDERWIJSVERNIEUWING IN AMERIKA [1])

door

Dr. J. H. J. ALMERING

's-Gravenhage

In de Verenigde Staten van Amerika bestaan verschillende instanties, die zich met de vernieuwing van het middelbaar wiskunde-onderwijs bezig houden. De drie voornaamste zijn:

de „Commission on Mathematics" van de „College Entrance Examination Board";

het „University of Illinois Committee on School Mathematics";

de „School Mathematics Study Group", met aan het hoofd Prof. Edward G. Begle van de Stanford University.

Deze laatste groepering, die wij in het vervolg zullen aanduiden met S.M.S.G., treedt het meest op de voorgrond. De S.M.S.G. werd in het begin van 1958 door de voorzitter van de American Mathematical Society ingesteld. Haar opdracht was: methoden te zoeken die tot verbetering van het wiskunde-onderwijs op de high-school zouden kunnen leiden. De federale regering gaf in verband hiermee een belangrijke subsidie.

De S.M.S.G. toog terstond aan het werk en begon met te verklaren dat het wiskunde-onderwijs op de high-school inderdaad vele zwakke plekken vertoonde. Een der voornaamste hiervan was naar haar mening de bij dit onderwijs heersende neiging om *te veel* aandacht te besteden aan louter mechanische bewerkingen met getallen en *te weinig* aandacht te hebben voor de betekenis van de regels volgens welke deze bewerkingen werden uitgevoerd. De belangstelling diende zich dus anders te richten en naar de mening van de S.M.S.G. zou deze richtingsverandering zich het beste laten uitvoeren met behulp van een aantal van de nieuwe ideeën die in deze eeuw in de wiskunde waren opgetreden.

De S.M.S.G. pakte de zaak energiek aan. Binnen korte tijd waren een honderdtal wiskundigen van de universiteiten en een even groot aantal uit de rangen van het high-school onderwijs bezig met het

---

[1]) Gedeelten van dit artikel zijn ontleend aan mijn artikel in „Streven" van juli 1963, p. 963—970.

schrijven van nieuwe leerboeken die in overeenstemming moesten zijn met de inzichten van de commissie. Binnen het jaar kwamen de eerste boeken van de pers en reeds bij het begin van de cursus '59–'60 werden deze door 400 leraren, lesgevend aan 42000 leerlingen in 45 staten, in gebruik genomen.

Aanvankelijk was er weinig openlijke kritiek en konden de vernieuwers in een idyllische atmosfeer van rust met hun werk doorgaan. Dit veranderde plotseling in oktober 1961, toen de Amerikaanse mathematicus Morris Kline een uiterst scherpe aanval deed op de voorgestelde en gedeeltelijk reeds in praktijk gebrachte hervormingen. In een artikel in *The New York University Alumni News*, een tijdschrift dus dat ook en vooral door zeer veel niet-wiskundigen gelezen wordt, betoogde Kline dat het nieuwe wiskunde-programma een ernstig gevaar zou betekenen voor de wetenschappelijke ontwikkeling van het land. Met grote letters staat boven zijn artikel: *Math Teaching Reforms Assailed As Peril to U.S. Scientific Progress.*

Kline zegt hierin, dat de traditionele wiskunde, zoals die tot nu toe op de high-school onderwezen werd, te weten de algebra, de meetkunde, trigonometrie, analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening, nog altijd de basis van de wiskunde is en de grondslag vormt van de belangrijkste wetenschappelijke ontdekkingen van de moderne tijd. De nieuw-opgekomen ideeën zijn volgens hem alleen maar bruikbaar voor de mathematicus die zich interesseert voor de grondslagen van de wiskunde, maar voor de opvoeding van jonge mensen zijn zij volkomen ongeschikt, deze worden er door ontmoedigd en in de war gebracht.

Het enige nieuwe onderwerp dat in zijn ogen genade kan vinden is de statistiek. Overigens acht Kline slechts ondergeschikte wijzigingen van het huidige programma nodig. Als er aan het wiskundeonderwijs iets hervormd moet worden, dan moet deze hervorming bestaan in het verbeteren van de onderwijsmethoden, in het opvoeren van het peil der docenten en in het leggen van het accent op de toepassingen van de wiskunde in de wetenschap. Mocht het onverhoopt toch zo ver komen, dat het nieuwe programma wordt ingevoerd, dan ziet Kline een sombere toekomst in het verschiet, zoals moge blijken uit de enigszins dramatische slotalinea van zijn artikel: „*If the new curricula are extended countrywide, and our students are asked to learn sterile, peripheral, pedantic details in place of the fruitful and rich essence of mathematics, we shall soon be outclassed and all of us will suffer*".

Zoals de lezer ziet, neemt Kline geen blad voor de mond en zet

zijn standpunt uiteen op een wijze die aan duidelijkheid niets te wensen overlaat.

Het artikel (dat 3 à 4 duizend woorden lang is) is verlucht met twee tekeningen van leerlingen, die met wanhopige blikken naar een schoolbord met wiskundige symbolen, resp. naar elkaar zitten te kijken, en met een foto die ons een vriendelijk glimlachende heer Morris Kline toont. (Blijkbaar was Kline op het tijdstip dat de foto genomen werd, nog niet met de S.M.S.G. bekend.)

Het artikel van Kline heeft in de Verenigde Staten in brede kring de aandacht getrokken en is aanleiding geweest tot een stroom van publikaties. Dit is des te meer begrijpelijk als men bedenkt dat Kline niet de eerste de beste is. Hij is director of electromagnetic research bij het „Institute of mathematical sciences" van de New York University. Hij heeft zeer vele wetenschappelijke en ook populaire publikaties op zijn naam staan, hij is in de praktijk werkzaam geweest en hij is bezitter van een aantal patenten op het gebied van de radio-techniek.

Bij alle beoefenaars der toegepaste wiskunde (ook hier te lande) is zijn naam bekend. Echter wil ik er aan toevoegen, dat hij, zoals een Amerikaans hoogleraar in de wiskunde mij onlangs verzekerde, onder zijn vakgenoten óók bekend is door zijn dikwijls extreme denkbeelden.

Wat is het antwoord van de „vernieuwers" op deze kritiek van Kline? Allereerst merken zij op, dat Kline de onjuiste indruk wekt, als zou het hun bedoeling zijn om de klassieke wiskunde geheel over boord te zetten. Dit nu is geenszins het geval. Zij willen de traditionele wiskunde voor zeker 80% behouden. Het voordeel van de nieuw in te voeren begrippen is juist hierin gelegen, dat deze de aard en de structuur van de klassieke wiskunde in een helderder licht stellen en hierdoor beter laten begrijpen, zo zeggen de vernieuwers. Kline schijnt, zo gaan zij verder, op het standpunt te staan, dat de wiskunde er enkel is voor de toepassingen. Welnu, de geschiedenis van de wiskunde geeft hem geen gelijk. Pas toen de wiskunde er in slaagde om zich van de toepassingen te bevrijden, was zij in staat om een tot dan toe ongekende vlucht te nemen. De geschiedenis leert, dat de „trend" van de wiskunde wijst op een zich steeds meer verheffen naar hogere niveaus van abstractie en dat, hoe paradoxaal dit ook moge klinken, toen de wiskunde zich schijnbaar van de ervaring verwijderde, dit in veel gevallen leidde tot een dieper inzicht in een of ander gebied van de realiteit. Bovendien ziet men herhaaldelijk gebeuren, dat zelfs zeer abstracte wiskundige

theorieën toch vroeg of laat hun praktische toepassing vinden. Tot zover de hervormers.

Toen de kruitdamp enigszins was opgetrokken, verscheen in het voorjaar van 1962 een lezenswaardig en uitvoerig opstel over de „vernieuwing", ditmaal van de hand van een buitenstaander, Benjamin de Mott, docent in de Engelse taal te Amherst [1]). In een artikel in „The American Scholar" onder de veelzeggende titel: *The Math Wars* maakt hij de balans op van de gevoerde polemiek en spreekt tot beide partijen verzoenende woorden. Bij De Mott wegen de argumenten van de vernieuwers ten slotte wel het zwaarst, al geeft hij toe, dat bij de vernieuwers toch wel heel sterk behoefte gevoeld wordt aan een man, die zich in het publieke debat met Kline kan meten. Hij erkent ook, dat de ervaring wel heeft uitgewezen dat de S.M.S.G.-leerboeken hogere eisen aan de leerling stellen dan de tot dusver gebruikte boeken.

De Mott merkt nog op dat Kline onder zijn vakgenoten een vrijwel geïsoleerde positie inneemt. Hij mag dan wel de steun en de sympathie van veel ouders en schoolkinderen hebben, maar er is geen groep *wiskundigen* die achter hem staat.

Als om deze bewering te logenstraffen verscheen vrijwel gelijktijdig met het artikel van De Mott in de tijdschriften *The American Mathematical Monthly* en *The Mathematics Teacher* een verklaring die door 65 vooraanstaande Amerikaanse wiskundigen ondertekend was. Het merendeel van de ondertekenaars is uit universitaire kringen, enkelen zijn werkzaam in de praktijk. (I.B.M., Bell Telephone, Rand Corporation en G.E.C.)

Onder de ondertekenaars treft men er aan, wier namen een bekende klank hebben ook buiten de Verenigde Staten, zoals Lars V. Ahlfors, Garret Birkhoff, Richard Courant, Wilfred Kaplan, Norman Levinson, George Polya, André Weil en Alexander Wittenberg.

De „verklaring der 65" begint met vast te stellen dat het klimaat thans gunstig schijnt te zijn voor het invoeren van verbeteringen in de wiskundige opvoeding, maar constateert onmiddellijk daarna, dat er krachten aanwezig zijn die in de verkeerde richting werken.

De verklaring formuleert dan een zevental richtlijnen; ik geef hiervan een kort overzicht:

---

[1]) In zijn inaugurele rede van 9-1-'63 heeft Prof. Dr. Ph. Dwinger reeds de aandacht op de artikelen van Kline en De Mott gevestigd. (Zie Dr. Ph. Dwinger, Verscheidenheid en Eenheid in de Wiskunde, Waltman, Delft, p. 10). De aldaar voorkomende datering van het laatste artikel is onjuist.

1. *Voor wie*

Het wiskundeprogramma van de high-school moet voorzien in de behoeften van alle studenten. Het is verspilling van moeite om onderwerpen te behandelen die alleen van belang zijn voor een kleine minderheid van toekomstige wiskundigen.

2. *Weten is doen*

In de wiskunde is de waarde van het weten niet gelegen in het bezit van feitenkennis, maar in de „know-how". Het is nutteloos om ordebrengende begrippen in te voeren, als er geen voorafgaande ervaring is die geordend kan worden.

3. *Wiskunde en de andere wetenschappen*

Zowel in zijn culturele betekenis als in zijn praktische toepassing is de wiskunde nauw verbonden met de andere wetenschappen. Zou men de wiskunde hiervan scheiden, dan vervalt daarmee een van de voornaamste redenen om de wiskunde te beoefenen.

4. *Inductieve denkwijze en formele bewijzen*

Het wiskundige denken bestaat niet alleen uit deductieve redeneringen en formele bewijzen. De geesteswerkzaamheid waardoor wij te weten komen, *wat* wij moeten bewijzen en *hoe* we het moeten bewijzen, is evengoed een deel van het wiskundige denken als het bewijs dat hieruit eventueel te voorschijn komt.

5. *De genetische methode*

De beste manier om de geestelijke ontwikkeling van het individu te leiden is, hem de geestelijke ontwikkeling van het ras opnieuw te laten volgen.

Uit het feit, dat uit een oogpunt van logica A aan B voorafgaat, volgt niet, dat dit didactisch gezien óók zo moet zijn.

6. *„Traditionele wiskunde"*

Het huidige onderwijs in de wiskunde voldoet niet aan de eisen die men vandaag aan de dag hieraan kan stellen en heeft op essentiële punten verbetering nodig. Deze door bijna iedereen gedeelde mening willen wij met nadruk onderschrijven.

De veel gehoorde bewering, dat de behandelde onderwerpen verouderd zouden zijn, moeten wij echter afwijzen. De traditionele wiskundevakken zijn nog altijd van fundamenteel belang, en het zou een ramp zijn als een ervan zou komen te vervallen.

7. *„Moderne wiskunde"*

Gezien het gebrek aan verband tussen de verschillende delen van de huidige leerstof kan het nut hebben om eenheidbrengende algemene begrippen in te voeren. Een oordeelkundig gebruik van verzamelingen en van de taal en denkbeelden van de abstracte algebra kan meer samenhang en eenheid brengen. In overeenstemming

met onze principes wensen wij, dat het invoeren van nieuwe begrippen voorafgegaan wordt door voldoende *concrete* voorbereiding, en gevolgd wordt door pakkende toepassingen.

Het is ons niet mogelijk om hier een gedetailleerde analyse te geven van het voorgestelde nieuwe programma, maar wel willen wij vaststellen, dat wij op grond van de bovengenoemde richtlijnen het met verschillende punten niet eens kunnen zijn.

Het is duidelijk, dat niet alle wiskundigen dezelfde smaak hebben. De wiskunde heeft vele aspecten. Zij kan beschouwd worden als een instrument om de wereld om ons heen te begrijpen. Dit was vermoedelijk het standpunt van Archimedes en Newton. Zij kan echter ook gezien worden als een spel, waarvan wij de regels naar willekeur kunnen vaststellen.

Zo zijn er meer aspecten en iemand die wiskundige van beroep is, is vrij in de keuze van zijn standpunt.

Maar als het gaat om de opvoeding van de jeugd, dan is deze keuze méér dan een kwestie van smaak alleen. Wat een intelligente jongen wil, is de wereld om zich heen ontdekken, maar wij kunnen niet verwachten dat hij zich zal interesseren voor de wiskunde als deze hem voorgesteld wordt als een spel met naar willekeur vastgestelde regels.

In ieder geval wensen wij hun die aan het nieuwe programma werken, veel succes toe. Wij wensen in het bijzonder, dat zij aandacht zullen besteden aan het verband tussen de wiskunde en de andere wetenschappen en dat zij zorgvuldig het verschil in acht zullen nemen tussen de logische en de didactische volgorde. Alleen dan kunnen wij hopen dat de ware betekenis, het doel en het nut van de wiskunde toegankelijk gemaakt zullen worden voor alle studenten, dus ook voor de toekomstige wiskundigen.

Tot zover de „verklaring der 65", waarvan vertalingen verschenen in Franse en Duitse vakbladen. [1])

Het zal de aandachtige lezer niet ontgaan zijn, dat de in deze verklaring naar voren gebrachte inzichten als twee druppels water lijken op de denkbeelden van Kline, die trouwens een van de ondertekenaars is. Alleen is de toon van de verklaring meer gematigd. Er wordt zelfs in toegegeven dat het gebruik van moderne abstracte begrippen onder bepaalde omstandigheden nuttig kan zijn. De ver-

---

[1]) Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris, juin 1962;
Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, Bonn, Okt. 1962.

klaring bevat vele waardevolle, zij het hier en daar vanzelfsprekende opmerkingen. Wat opvalt is de grote waarde, die de ondertekenaars hechten aan de toepassingen van de wiskunde. Minder geslaagd is de waardering van de ondertekenaars voor wat zij de „genetische methode" noemen. Wat hierover gezegd wordt lijkt mij zeer aanvechtbaar en gaat in de wiskunde zeker niet altijd op.

In mei 1962 publiceerde Prof. E. G. Begle, de reeds eerder door ons genoemde aanvoerder van de S.M.S.G., in „*The American Mathematical Monthly*" enkele opmerkingen naar aanleiding van de „verklaring der 65". Hij geeft uitdrukking aan de blijdschap van de medewerkers van de S.M.S.G., over het feit dat een aantal vooraanstaande wiskundigen principes voor de onderwijsvernieuwing hebben vastgesteld, die in zulke hoge mate overeenstemmen met hun eigen denkbeelden hierover. Deze richtlijnen, zo zegt hij, kunnen een mooi uitgangspunt zijn voor de discussie van de huidige vernieuwingspogingen. Neem een bepaald schoolboek, nieuw of oud, neem een bepaalde richtlijn en dan kunnen wij precies uitmaken of en in hoeverre het boek aan de richtlijn voldoet.

Verder neemt Begle met leedwezen kennis van het onbehagen der „65" over de lopende vernieuwingspogingen. De auteurs van de verklaring, zo vervolgt hij, moeten er ongetwijfeld van op de hoogte zijn geweest, dat er in de afgelopen jaren zeer uiteenlopende voorstellen voor programmahervorming gedaan zijn. Toch scheren zij al deze voorstellen over één kam en keuren ze allemaal zonder onderscheid af. Dit ziet Begle als een onhoffelijkheid jegens de velen die tijd en inspanning voor de S.M.S.G. hebben over gehad, en doet bij hem de vraag rijzen, of „de 65" au fond eigenlijk wel een verandering van de status quo wensen.

In december '62 verschijnt er wéér een artikel van Begle in „*The American Mathematical Monthly*". De „verklaring der 65" begint door te werken en Begle ziet zich geplaatst tegenover de enorme problemen die zij heeft opgeroepen. Zijn artikel kondigt grote plannen aan en is tegelijkertijd een kreet om hulp. De meningen over de waarde van de recente vernieuwingspogingen, aldus Begle, lopen sterk uiteen en worden door hun respectieve voorstanders hardnekkig verdedigd, hoewel er slechts weinig feitenmateriaal ter beschikking is. Met de bedoeling, aan deze toestand een einde te maken, wordt een vijfjarenplan afgekondigd.

Er zal een grootscheepse studie gemaakt worden over wiskundige bekwaamheid. Met overheidssteun is hiertoe een instituut opgericht

onder de weidse naam: „*National Longitudinal Study of Mathematical Abilities*", afgekort N.L.S.M.A. Een comité van zeven personen, te weten 5 wiskundigen (Beberman, Begle, Dilworth, Linton en Lister) en 2 psychologen (Alpert en Kagan), is belast met de leiding.

In grote trekken komt het plan hierop neer. In elk der „gradelevels" 4, 7 en 10 zijn 40.000 studenten uitgekozen; hieronder zijn zowel studenten die het nieuwe als die het oude leerplan volgen. Deze studenten zullen gedurende een tijdvak van vijf jaar periodiek getest worden.

De vraag is nu: welke informatie wensen wij te verkrijgen? Dit hangt af van het doel, waarmee wij de wiskunde onderwijzen. Begle noemt een zevental doelstellingen op:
1. het bijbrengen van wiskundige feiten en technieken,
2. het leren begrijpen van deze feiten en technieken,
3. het ontwikkelen van vaardigheid in het oplossen van problemen,
4. het geven van een taal die gebruikt kan worden bij het verklaren van de wereld waarin wij leven,
5. het leggen van een basis voor verdere studie van de wiskunde,
6. een voorbeeld geven van streng en exact denken,
7. het aan de komende generatie doorgeven van een deel van ons culturele erfgoed.

Voor 1. zijn er tests in overvloed aanwezig. Bij 2. ligt de situatie al wat moeilijker, terwijl voor de overige doeleinden de gebruikelijke tests niet geëigend of niet toepasbaar zijn. Daarom doet Begle aan het einde van zijn artikel een dringend beroep op allen, wie de verbetering van het wiskunde-onderwijs ter harte gaat, om nieuwe ideeën te bedenken voor het meten van wiskundige prestatie en ontwikkeling.

Hoe men ook over de S.M.S.G. en haar vernieuwingspogingen wil denken, men zal moeten toegeven dat zij allerminst bij de pakken neerzit. De ongezouten kritiek van Morris Kline en de daarop volgende „verklaring der 65" zijn blijkbaar voor haar aanleiding geweest om de vernieuwingsmethoden aan een grondig onderzoek te onderwerpen. In dit verband is het te betreuren, dat niemand van „de 65" uitgenodigd werd (of zich geroepen voelde??) om zitting te nemen in de leiding van de N.L.S.M.A.

Ondertussen zal men in Amerika en ook in andere landen de resultaten en publikaties van laatstgenoemde instelling met veel interesse tegemoetzien.

OF

door

Dr. P. G. J. Vredenduin

Oosterbeek

In de wiskunde pleegt men de eis te stellen, dat de betekenis van elke term, die men gebruikt, nauwkeurig wordt omschreven. Meestal geschiedt dit door middel van een definitie. Zo geeft men bij de opbouw van de planimetrie definities van een cirkel, een parallellogram, evenwijdig. Niet alle begrippen en relaties kunnen op deze wijze gedefinieerd worden. Men moet uitgaan van een aantal begrippen en relaties, die niet gedefinieerd worden, de zg. grondbegrippen en -relaties. Dit kunnen zijn punt, rechte lijn, ligt op, is congruent met, tussen. De betekenis van deze grondbegrippen en -relaties wordt vastgelegd door de axioma's, waarvan men uitgaat.

Dit alles is natuurlijk overbekend. En eveneens weet ieder, dat het beslist niet waar is, dat de betekenis van elke voorkomende term bij de opbouw van een wiskundig systeem nauwkeurig vastgelegd wordt. In een wiskundeboek zal men verschillende woorden tegenkomen, waarvan men een omschrijving van de betekenis mist. Dergelijke woorden zijn: niet, en, of, volgt uit, als . . . dan, dus, omdat, er is een, alle, sommige, verzameling, relatie, predikaat, variabele. Deze woorden worden niet gedefinieerd, maar bekendheid met hun betekenis wordt verondersteld. De oorzaak hiervan is, dat deze termen niet van mathematische, maar van logische aard zijn.

Om het verschil tussen mathematische en logische termen te begrijpen, moet men zich realiseren, dat wiskunde een deductieve (bewijzende) wetenschap is. D.w.z. in de wiskunde wordt de juistheid van elke bewering afgeleid uit de juistheid van andere beweringen en niet uit feiten. Dat eiken 's winters hun bladeren verliezen, kan men constateren, maar niet bewijzen. Men stelt echter niet door constatering vast, dat elk priemgetal groter dan 2 oneven is, of dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan. De juistheid van een dergelijke bewering verkrijgt men door haar te bewijzen. Nu is dit deduceren, dit concluderen dat een uitspraak juist is op grond van de juistheid van andere uitspraken, een denkwijze, die niet alleen in de wiskunde, maar ook daarbuiten veelvul-

dig wordt toegepast. Immers ook buiten de wiskunde zal men de juistheid van een uitspraak vaak verkrijgen door het trekken van een conclusie. Een bekend voorbeeld hiervan is

        alle mensen zijn sterfelijk,
        Socrates is een mens,
dus   Socrates is sterfelijk.

Door deductie (en niet door de feiten te raadplegen) wordt de juistheid van het derde oordeel afgeleid uit de juistheid van de eerste twee.

Nu is het om te kunnen deduceren, in welke wetenschap ook, noodzakelijk de betekenis van een aantal termen, die in de deducties voorkomen, te begrijpen. Zo kan men niet inzien, dat bovenstaande deductie van de uitspraak 'Socrates is sterfelijk', geoorloofd is, als men niet de betekenis kent van de term 'alle'.

Dit soort termen is dus niet van specifiek wiskundige aard, maar van veel algemener gebruik. De betekenis ervan wordt daarom niet in de wiskunde vastgelegd. Integendeel, als men wiskunde wil bedrijven, moet men kunnen deduceren en moet men dus de betekenis van termen, zoals 'alle' te voren al kennen. De betekenis hiervan wordt vastgesteld in de wetenschap, die de aard van het deductieve denken onderzoekt. Deze wetenschap heet logica. En daarom zijn termen zoals 'alle' geen wiskundige, maar logische termen.

Door een tweede voorbeeld wordt dit misschien nog duidelijker. Het is, als we van een getal kunnen bewijzen, dat het door 2 of door 3 deelbaar is, en we langs andere weg kunnen aantonen, dat het niet door 2 deelbaar kan zijn, duidelijk, dat het door 3 deelbaar is. Maar evenzeer weet mijn vrouw, als ik haar vertel, dat ik morgen naar Amsterdam of naar Utrecht zal gaan, en ik haar even later meedeel, dat ik besloten heb toch maar niet naar Amsterdam te gaan, dat ik morgen naar Utrecht ga. En een chemicus, die uit zijn experimenten ziet, dat een bepaalde vloeistof een verdund zuur of gedestilleerd water is, en na zijn experimenten voortgezet te hebben tot het resultaat komt, dat het geen verdund zuur is, weet nu, dat het gedestilleerd water is. De deductieregel 'als A of B waar is en als bovendien B niet waar is, dan is A waar', is stellig niet typisch wiskundig, al zal elke wiskundige haar grif toepassen.

De in deze regel voorkomende termen moeten dus de mathematicus duidelijk zijn, voordat hij wiskunde kan bedrijven. Een van deze termen is het woord 'of'. Over de betekenis van dit woord wil ik het in dit artikel hebben. De grote moeilijkheid hierbij is, dat de term 'of' in het dagelijks leven veel gebruikt wordt en dat ieder dus reeds op de hoogte meent te zijn van de betekenis ervan, voordat

hij begint wetenschap te bedrijven. En een tweede moeilijkheid wordt geleverd door de omstandigheid, dat de betekenis van het woord 'of' in het dagelijks spraakgebruik niet steeds dezelfde is, maar sterk wisselt met de context en dat we ons van deze wisseling van betekenis vaak niet bewust zijn. Onze eerste vraag is dus: wat wordt in de omgangstaal met het woord 'of' bedoeld?

We kunnen dit het beste analyseren door een paar voorbeelden te geven. Als eerste voorbeeld kies ik: daar loopt een haas of een konijn. Ik vraag me af, wat door de spreker, dus door degeen die deze uitspraak doet, bedoeld wordt. Hij geeft hiermee te kennen, dat hij zeker weet, dat het beest, dat hij ziet lopen, niets anders is dan een haas of een konijn (dus, als u het herhaald gebruik van het woord 'of' hier wenst te vermijden: geen beest is, dat zowel geen haas als geen konijn is). Maar dit is nog niet alles. Hij wil bovendien te kennen geven, dat hij niet weet, welke van de twee het is. Zijn uitspraak wijst dus op een samengaan van onzekerheid (haas?, konijn?) en van zekerheid (niets anders).

Tweede voorbeeld. Bij het dessert wordt door de gastvrouw fruit gepresenteerd. Tegen een van de jongste gasten zegt ze: „Je mag een appel of een peer nemen." Zonder twijfel is haar bedoeling hiermee: je mag een appel nemen, je mag een peer nemen, maar je mag niet zowel een appel als een peer nemen.

In de betekenis van 'of' is hier begrepen 'niet allebei'. Is dit inherent aan de betekenis van 'of' of niet? Een vergelijken met het vorige voorbeeld helpt niet. Het is immers a priori uitgesloten, dat iets een haas en een konijn tegelijk is. Ook als men met 'of' niet expliciet bedoeld heeft, dat het geen haas en konijn tegelijk kan zijn, is dit dus toch het geval.

Derde voorbeeld. Heb je ook een dubbeltje of een kwartje in je portemonnee? De aangesprokene zal antwoorden, als hij een dubbeltje heeft: „ ja, een dubbeltje" en als hij zowel een dubbeltje als een kwartje blijkt te hebben: „ja, allebei".

Hij zal alleen maar „neen" antwoorden, als hij geen dubbeltje en ook geen kwartje heeft. Neemt men in het vorige voorbeeld een peer en een appel, dan zal de gastvrouw zeggen, dat dit niet de bedoeling was. Maar als men in dit voorbeeld een kwartje en een dubbeltje heeft en de gestelde vraag met „neen" beantwoordt, dan zal de vrager zeggen, dat men hem slecht begrepen heeft.

Tracht men voorbeelden te vinden, waarin met 'of' bedoeld wordt 'een van beide', dan blijkt dit gemakkelijker dan het vinden van niet gewrongen voorbeelden, waarin 'of' betekent 'minstens een van beide'. Van het laatste wil ik hier nog twee voorbeelden geven,

waarvan het eerste ontleend is aan een Amerikaans schoolboek van de S.M.S.G.

Vierde voorbeeld. Twee dames wonen in Amsterdam en in Brussel. Ze hebben een gemeenschappelijke vriendin in New York, die over een week jarig is. Ze overleggen per telefoon, wat ze haar zullen zenden. De tijd is kort en daaarom zegt de een tegen de ander: „Laten we ervoor zorgen, dat we vandaag onze pakjes verzenden, dan komt jouw of mijn pakje in elk geval nog wel op tijd." Hiermee is kennelijk niet bedoeld uit te sluiten, dat beide pakjes op tijd aankomen.

Vijfde voorbeeld. De overheid wil bewerkstelligen, dat arbeidsonvolwaardigen ondersteuning krijgen. De overheid gaat er daarbij van uit, dat invaliden niet arbeidsvolwaardig zijn en dat personen boven de 65 jaar het ook niet zijn. Ze stelt daarom vast: personen, die invalide of ouder dan 65 jaar zijn, krijgen van staatswege ondersteuning. Niemand zal hieruit lezen, dat een invalide, die ouder is dan 65 jaar, op grond van dit artikel geen recht heeft op ondersteuning.

Met '*A* of *B*' wordt dus soms bedoeld, dat *A* en *B* niet beide waar zijn, soms echter dat het waar zijn van beide niet uitgesloten is. Indien men er behoefte aan heeft deze dubbelzinnigheid op te heffen, gebruikt men in het eerste geval wel de uitdrukkingswijze 'òf . . . òf' en in het tweede geval 'of (en)'.

Verder bedoelt men soms met '*A* of *B*', dat het onzeker is of *A* waar is en eveneens of *B* waar is, terwijl in andere gevallen deze onzekerheid geen rol speelt. Zo speelt in het vijfde voorbeeld de onzekerheid geen rol. Er is stellig niet bedoeld, dat iemand ondersteuning krijgt als men niet zeker weet, dat hij invalide is en ook niet dat hij ouder is dan 65 jaar, terwijl wel vaststaat, dat een van deze twee het geval is.

De leerling, die op de middelbare school komt, is eraan gewoon het woord 'of' in deze verschillende betekenissen te gebruiken zonder zich er ooit rekenschap van te geven, wat hij precies bedoelt, als hij 'of' zegt. De gevolgen daarvan blijven uiteraard niet uit. Ik wil dit illustreren aan de hand van enige alleszins verklaarbare, maar verkeerde antwoorden, die ik elk jaar weer krijg bij het oplossen van vraagstukken over ongelijkheden in de tweede klas. Als voorbeeld neem ik drie opgaven.

Welke waarden van x voldoen aan de volgende ongelijkheden:

a. $x^2 \geqq 4$ (dus $x^2 > 4$ of $x^2 = 4$),

b. $x^2 \geqq -1$ (dus $x^2 > -1$ of $x^2 = -1$),

c. $x > 2$ of $x < 6$?

In geval a wordt als antwoord gegeven $x \leqq -2$ of $x \geqq 2$. Vraagt men, of 7 voldoet, dus of geldt $7^2 > 4$ of $7^2 = 4$, dan is het antwoord „ja, want $7^2 > 4$". En vraagt men, of 2 voldoet, dan is het antwoord eveneens „ja" met als motivering $2^2 = 4$. Zodra aan een van de twee onderdelen $x^2 > 4$ en $x^2 = 4$ voldaan is, is dus volgens de leerling voldaan aan $x^2 > 4$ of $x^2 = 4$. Aan allebei tegelijk kan niet voldaan zijn; hier ligt dus geen probleem. En de onzekerheid speelt geen rol. We weten zeker, dat $7^2 > 4$ en niet $7^2 = 4$ is, maar zeggen toch, dat 7 voldoet. Deze antwoorden zijn alle correct.

In geval b wordt de situatie in de praktijk van het lesgeven merkwaardigerwijs anders. Veel leerlingen zeggen, dat de ongelijkheid $x^2 \geqq -1$ vals is en funderen dit door te zeggen, dat x^2 immers niet gelijk aan -1 kan zijn. Weliswaar is voor elke x de uitspraak $x^2 > -1$ juist, maar nooit is $x^2 = -1$. Voor de leerling klinkt 'steeds is $x^2 \geqq -1$' net als: elke dag om 12 uur of om kwart over 12 slaat de torenklok 12. Zoiets stompzinnigs zegt men niet. Het is onjuist taalgebruik en dus verkeerd. De stap van verkeerd naar fout is psychologisch gesproken niet groot. En het is dan ook geen wonder, dat de uitspraak over de torenklok verworpen wordt en daarmee gepaard de ongelijkheid $x^2 \geqq -1$ voor vals gehouden wordt.

Ten slotte geval c. Als men vraagt, of 1 voldoet aan $x > 2$ of $x < 6$, dan krijgt men een bevestigend antwoord. Ook de vraag of 10 voldoet wordt bevestigend beantwoord. Maar vraagt men of 5 voldoet, dan is het antwoord veelal „neen" met als motivering: dan is $x > 2$ *en* $x < 6$, maar niet $x > 2$ *of* $x < 6$. Waarmee de leerling min of meer wil zeggen: als ik volgende week proefwerk algebra en proefwerk meetkunde heb, dan zeg ik niet, dat ik proefwerk algebra of proefwerk meetkunde heb.

Het is niet moeilijk deze leerling in een hoek te drijven en hem te demonstreren, dat hij 'of' telkens in een andere betekenis gebruikt. Men kan verder constateren, dat hij juist taalgebruik en geldigheid door elkaar haalt. En het is zelfs de vraag, of men dit laatste met recht mag zeggen. Immers als iemand thuis verkondigt tegen zijn ouders, dat hij de volgende week proefwerk algebra of proefwerk meetkunde krijgt, dan zullen zijn ouders hem zonder twijfel voor weinig waarheidlievend houden, als ze horen, dat hij beide proefwerken krijgt.

Ik zou het nog iets anders willen zeggen. Als mijn buurman in volle ernst zegt: „sneeuw is zwart of $2 \cdot 2 = 4$", dan belt zijn vrouw de dokter op. En toen Prof. Peremans op de heroriënteringscursus in Eindhoven zei: „sneeuw is zwart of $2 \cdot 2 = 4$", vonden de daar

wezige wiskundeleraren het een verstandige opmerking. Hoe komt dit?

Het is duidelijk, dat men in wetenschap en zeker in deductieve wetenschap geen termen kan gebruiken in steeds wisselende betekenis. Als de betekenis van een term niet vastligt, dan moet men deze gaan vastleggen, voordat men de term gaat gebruiken. Als men dus op een gegeven ogenblik bemerkt, dat 'of' wisselende betekenis heeft en dat dit aanleiding tot misverstand geeft, dan moet men nauwkeurig vastleggen welke betekenis men aan dit woord voortaan zal hechten.

Om te beginnen is het duidelijk, dat in wiskunde het gebruik van 'of' geen verband kan houden met onzekerheid. Met '$1 + \sqrt{2} < 2{,}5$ of $1 + \sqrt{2} > 2{,}5$' bedoelt men alleen, dat $1 + \sqrt{2} = 2{,}5$ niet juist is. Men bedoelt niet, dat het onzeker is, welke van de twee deeluitspraken juist is en dat de gehele uitspraak onjuist wordt op het moment, waarop men beslist heeft, welke van de twee deeluitspraken '$1 + \sqrt{2} < 2{,}5$' en '$1 + \sqrt{2} > 2{,}5$' juist is. Men koppelt het al of niet juist zijn immers nooit aan de mate, waarin de kennis van de onderzoeker voortgeschreden is, maar acht juistheid van een wiskundige uitspraak objectief vaststaand.

De tweede kwestie is moelijker. Wordt met '*A* of *B*' in de wiskunde bedoeld, dat *A* en *B* een van beide of allebei juist zijn, of wordt ermee bedoeld, dat *A* en *B* een van beide maar niet allebei juist zijn? In het dagelijks leven komen beide betekenissen voor; we hebben daar dus eigenlijk te maken met twee verschillende woorden, die allebei 'of' geschreven worden. In de wetenschap moeten we een dergelijke situatie vermijden door 'of' alleen in een van de beide betekenissen te gebruiken of door twee verschillende woorden voor de twee betekenissen te gebruiken of iets dergelijks. Ik geloof, dat we hier moeten volstaan met te constateren, dat in de loop van de tijd in wiskunde het woord 'of' de eerste betekenis gekregen heeft, dus die betekenis die het gelijktijdig juist zijn van *A* en *B* toelaat. De voordelen van deze keuze worden duidelijk, als we denken aan de parallel tussen het gebruik van de logische termen 'en' en 'of' en de bewerkingen uit de verzamelingsleer, waarbij doorsnede resp. vereniging van twee verzamelingen gevormd worden. Als twee verzamelingen *V* en *W* gedefinieerd zijn volgens:

$$V = \{x \mid P(x)\} \text{ en } W = \{x \mid Q(x)\},$$

waarin *P* en *Q* predikaten voorstellen, dan is de definitie van de doorsnede en de vereniging van *V* en *W* resp.

$$V \cap W = \{x \mid P(x) \text{ en } Q(x)\},$$
$$V \cup W = \{x \mid P(x) \text{ of } Q(x)\}.$$

Tot de vereniging van V en W behoren ook die elementen, die zowel element van V als van W zijn. De tweede definitie klopt dus alleen, als '$P(x)$ of $Q(x)$' ook juist is, als $P(x)$ en $Q(x)$ beide juist zijn. [1])

In de wiskunde is dus de afspraak gemaakt, dat we onder 'A of B' zullen verstaan een uitspraak, die waar is als minstens een van de beide uitspraken A en B waar is en onwaar als beide uitspraken A en B onwaar zijn. Het verdient nu aanbeveling om ten einde elk misverstand de kop in te drukken de associatie met het woord 'of' uit de omgangstaal te vermijden door het woord 'of' te vervangen door een symbool. Daarvoor wordt veelal het symbool $\vee$ gekozen.

De betekenis van '$A \vee B$' kunnen we nu vastleggen door de volgende tabel

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

In deze tabel stelt het cijfer 1 'waar' en het cijfer 0 'onwaar' voor.

Ik moet nog even terugkomen op een schijnbare tegenspraak in het voorgaande. Eerst is uiteengezet, dat 'of' een logische term is en dat de betekenis ervan in de logica vastgelegd wordt. Men moest van deze betekenis op de hoogte zijn eer men wiskunde ging bedrijven. Daarna is telkens gesproken over de betekenis, die 'of' in de wiskunde heeft. Principieel is het natuurlijk juist, dat men de betekenis van termen zoals 'of' precies moet kennen, voordat men ze in het deductieproces kan hanteren. In de praktijk is het uiteraard zo, dat men al deducerend de behoefte gaat gevoelen aan verscherping van de betekenis van de gebezigde termen. En omdat in de wiskunde het deductieproces op de meest subtiele wijze uitgevoerd wordt, gevoelt men daar deze behoefte aan verscherping het duidelijkst. Het gevolg is, dat de wiskunde stimulerend zal werken op het onderzoek naar de nauwkeurige betekenis van de logische termen. De wiskunde geeft dus aan de logica de stimulans nauwkeurig te omlijnen, wat men onder de bij het deduceren gebruikte termen wil verstaan. En daarna gebruikt de wiskundige deze termen in de zo vastgestelde betekenis.

Wat hier theoretisch zorgvuldig uit elkaar gehouden wordt, de regels van het deduceren (logica) en de praktijk van het deduceren (wiskunde), is praktisch uiteraard niet te scheiden. Er is sprake van een wisselwerking. Vandaar dat ik gezegd heb, dat in de wiskunde aan 'of' een bepaalde betekenis wordt gegeven, terwijl preciezer was geweest te zeggen, dat de wiskunde de logica gestimuleerd heeft een precieze betekenis van het woord 'of' vast te leggen.

---

[1]) Een natuurlijk voorbeeld uit de schoolwiskunde, waarin duidelijk blijkt, dat 'of' deze betekenis heeft, is de stelling uit de stereometrie: als enige lijnen elkaar twee aan twee snijden, dan liggen ze in één vlak of gaan ze door één punt.

De betekenis van de gemaakte afspraak mag men echter niet overschatten. In de wiskunde, en meer algemeen in elke deductieve wetenschap, hebben we aan 'of' een zeer bepaalde betekenis toegekend. Dat wil echter geenszins zeggen, dat nu daarbuiten, dus o.a. in het dagelijks leven, men gehouden is 'of' uitsluitend in deze betekenis te gebruiken. Integendeel, de dagelijkse omgangstaal trekt zich van deze logische definitie van 'of' niets aan. En dus blijft de uitspraak 'ik heb volgende week een algebra proefwerk of een meetkunde proefwerk' een onjuiste uitspraak als men beide proefwerken heeft. En wel, omdat 'of' hier niet de logische betekenis heeft, maar de betekenis van één van de twee en niet beide, terwijl niet zeker is welk van de twee. En evenzo blijft de opmerking van mijn buurman, dat sneeuw zwart of $2 \cdot 2 = 4$ is, kolder en een reden om de dokter op te bellen. Alleen als men het in zijn hoofd haalt om onder 'of' in een uitspraak als 'sneeuw is zwart of $2 \cdot 2 = 4$' datgene te verstaan, wat er in de logica onder verstaan wordt, dan zou deze uitspraak een ware uitspraak zijn. En dat werd door Prof. Peremans bedoeld.

Ten slotte nog één vraag. Zijn we verplicht bovengenoemde afspraak te maken omtrent de betekenis van 'of'? Natuurlijk niet. Men kan gerust een andere afspraak maken. Men spreekt dan een andere taal en moet niet verbaasd zijn, dat men andere uitspraken juist zal achten dan degeen die de oorspronkelijke taal spreekt. Gebeurt dit in werkelijkheid ook wel, dat men in wiskunde aan 'of' een andere betekenis hecht? Dit gebeurt stellig; een treffend voorbeeld daarvan is het gebruik van 'of' in de intuïtionistische wiskunde. Het bovengenoemde 'of' wil volgens de intuïtionist alleen zeggen, dat het gelijktijdig onwaar zijn van A en B contradictoor is. Hij stelt daar een meer positieve betekenis van 'of' tegenover, nl. A en B zijn minstens een van tweeën waar en het is uit te maken, welk van de twee waar is. Dit is een van de oorzaken waardoor de intuïtionistische wiskunde van de klassieke verschilt.

DE INVARIANTEN W, D EN H ENER KEGELSNEDE

door

J. C. VAN RHIJN

(Vollenhove)

Uitgaande van de kegelsnedenvergelijking $f(x, y) = 0$, waarin $f(x, y) = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33}$, kunnen allerlei eigenschappen van een kegelsnede K worden afgeleid, waarbij de bekende invarianten:

$$W = a_{11} + a_{22}, D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ en } H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

een zeer grote rol spelen.

Wij zullen nu de eigenschappen die hiermee samenhangen, eens afleiden, door uit te gaan van een andere uitdrukkingsvorm voor K, berustend op specifiek voor kegelsneden geldende meetkundige wetten.

Aan het slot zullen we dan nog trachten een verband te vinden tussen de zó verkregen invarianten en diè, welke wij hierboven reeds vermeldden.

Iedere kegelsnede K dan is bepaald door:

1. de afstand d van een punt $F(x_0, y_0)$, het brandpunt, tot de rechte l, gegeven door de vergelijking $px + qy + r = 0$, én

2. de verhouding $e \left(= \frac{c}{a}\right)$ der afstanden van een punt $P(x, y)$ tot F en l.

D.w.z., de *vorm* van K hangt af van d en e; de *ligging* t.o.v. het assenkruis hangt af van de plaatskeuze van F en l.
(In dit opstel beschouwen we slechts rechth. coördinaten).

Vandaar het gebruik om de vergelijking van K te brengen op de vorm:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda(px + qy + r)^2 = 0, \qquad (1)$$

de z.g. „brandpunt-richtlijn" vergelijking, waarin λ slechts een verkorte schrijfwijze is voor $-\frac{e^2}{p^2 + q^2}$. (2)

De bij (1) behorende invarianten duiden wij ter onderscheiding van die van $f(x, y) = 0$ aan met resp. W^*, D^* en H^*.

We vinden nu al meteen:

$W^* = (1 + \lambda p^2) + (1 + \lambda q^2) = 2 + \lambda(p^2 + q^2) = 2 - e^2$, en

$D^* = (1 + \lambda p^2)(1 + \lambda q^2) - (\lambda pq)^2 = 1 + \lambda(p^2 + q^2) = 1 - e^2$.

Tenslotte is

$$H^* = \begin{vmatrix} \lambda p^2 + 1 & \lambda pq & \lambda pr - x_0 \\ \lambda pq & \lambda q^2 + 1 & \lambda qr - y_0 \\ \lambda pr - x_0 & \lambda qr - y_0 & \lambda r^2 + x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix}.$$

Telt men nu x_0-maal de 1e kolom én y_0-maal de 2e kolom bij de derde kolom, dan komt er:

$$H^* = \begin{vmatrix} \lambda p^2 + 1 & \lambda pq & \lambda p(px_0 + qy_0 + r) \\ \lambda pq & \lambda q^2 + 1 & \lambda q(px_0 + qy_0 + r) \\ \lambda pr - x_0 & \lambda qr - y_0 & \lambda r(px_0 + qy_0 + r) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(px_0 + qy_0 + r) \begin{vmatrix} \lambda p^2 + 1 & \lambda pq & p \\ \lambda pq & \lambda q^2 + 1 & q \\ \lambda pr - x_0 & \lambda qr - y_0 & r \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(px_0 + qy_0 + r) \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ -x_0 & -y_0 & r \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(px_0 + qy_0 + r)^2 = -\frac{(px_0 + qy_0 + r)^2}{p^2 + q^2}. \quad e^2.$$

Nu stelt de breuk in het laatste lid juist het kwadraat van de afstand van F tot l voor, dus d^2.

Derhalve is

$$H^* = -d^2e^2.$$

Voorzover we nu de „standaard-vorm"(1) als punt van uitgang kiezen kunnen we reeds nu enkele belangrijke conclusies trekken:

Wèlke ligging t.o.v. het assenkruis K ook heeft, de waarde der vormen W^*, D^* en H^* wordt hierdoor niet aangetast, daar zij slechts die grootheden bevatten, die bepalend zijn voor de vorm van K.

Zo volgt in 't bijzonder uit $W^* = 0$, dat $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, zodat K dàn een orthogonale hyperbool is.

Daar voorts de krommen, die behoren bij $e = \frac{c}{a} < 1$, $e = \frac{c}{a} = 1$

en $e = \frac{c}{a} > 1$ resp. ellips, parabool en hyperbool worden genoemd, is de aard der kegelsnede K bepaald door $D^* \gtreqless 0$.

Dat $H^* = 0$ wijst op ontaarding der kegelsnede, moge, om enkele reële gevallen te beschouwen, blijken uit bijv.: $d = 0$ en $e = \frac{c}{a} > 1$. F ligt nu op l. K is nu ontaard in 2 door F gaande rechten, symmetrisch gelegen t.o.v. l, of door $d = 0$ en $e = \frac{c}{a} = 1$; de parabool is nu ontaard in z'n dubbel getelde hoofdas.

Overigens laat zich de „voorwaarde lijnenpaar" ($H^* = 0$) eenvoudig rechtstreeks afleiden, daar toch de vergelijking van elk lijnenpaar, voorgesteld door $f(x, y) = 0$, is terug te voeren tot $2(Ax + By + C)(px + qy + r) = 0$, zodat de erbij behorende determinant wordt:

$$H = \begin{vmatrix} Ap + Ap & Bp + Aq & Cp + Ar \\ Bp + Aq & Bq + Bq & Cq + Br \\ Cp + Ar & Br + Cq & Cr + Cr \end{vmatrix}, \text{ welke determinant,}$$

bijv. door splitsing der 1e kolom, uiteenvalt in twee determinanten die elk zijn te herleiden tot determinanten met 2 gelijk kolommen, zodat $H = 0$.

We zullen nu aantonen, dat de tot dusver gevonden kenmerken (W^* en H^* al of niet nul; $D^* \gtreqless 0$) algemene geldigheid hebben ook als de vergelijking van K *niet* in de „standaardvorm" gegeven is.

Teneinde nu de vergelijking $f(x, y) = 0$ van K te brengen op de standaardvorm (1), zullen we de coëfficiënten $a_{11}, a_{12}, \ldots$, enz., alle met een zekere reële factor $1/S$ moeten vermenigvuldigen.

Voor het onderzoek, waarmede wij ons thans bezighouden doet de juiste grootte van S er niet toe. Wij stellen eenvoudig $a_{11} = S(\lambda p^2 + 1), \ldots$, enz. ($S \neq 0$). Dan is direct in te zien, dat

$$W = S \cdot W^*, \quad D = S^2 \cdot D^* \quad \text{en} \quad H = S^3 \cdot H^*.$$

Hieruit volgt: $W = 0$ als $W^* = 0$ (en $W \neq 0$ als $W^* \neq 0$), en dat tegelijk met $D^* \gtreqless 0$ geldt: $D \gtreqless 0$.

Evenzo is $H = 0$ als $H^* = 0$ (en $H \neq 0$ als $H^* \neq 0$).

Hiermee is aangetoond, dat de kenmerken hun geldigheid behouden. Alvorens nu over te gaan tot het onderzoek naar de grootterelaties tussen de invarianten van $f(x, y) = 0$ en van (1), merken wij nog op dat het geval $p = q = 0$ voor wat (1) betreft geïnterpreteerd wordt als $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + C = 0$, zijnde de vergelijking van een al of niet reële cirkel.

De invarianten van onze „standaardvergelijking" (1) zijn absolute grootheden en kunnen dus dienst doen om de vergelijking $f(x, y) = 0$ tot deze vorm te herleiden.

Zo volgt uit $W^* - D^* = (2 - e^2) - (1 - e^2) = 1$, dat $W/S - D/S^2 = 1$, m.a.w., S is één der wortels van $S^2 - WS + D = 0$, kennelijk de S-vergelijking, behorend bij $f(x, y) = 0$.

Het is diè wortel S, die voldoet aan $W/S = W^* = 2 - e^2$, d.w.z. waarvoor geldt $0 < 2 - W/S = e^2 \lesseqgtr 1$.

Om een voorbeeld te noemen: bij de vgl. $f(x, y) = 0$, die als det. heeft

$$H = \begin{vmatrix} 21 & 5\sqrt{3} & 42 \\ 5\sqrt{3} & 31 & 10\sqrt{3} \\ 42 & 10\sqrt{3} & -60 \end{vmatrix}$$

hebben we als keuze $S_1 = 16$ en $S_2 = 36$.

We zullen hier voor de gewenste herleiding $S_2 = 36$ moeten kiezen, dus $1/S = 1/_{36}$. Overigens zal S eveneens moeten voldoen aan $S^3H^* = H$, d.i. aan $d^2e^2S^3 + H = 0$.

Terloops zij opgemerkt dat deze betrekking voor de parabool π, waar $D = 0$ en $S = W$ en $e = 1$, overgaat in $p^2W^3 + H = 0$, daar nu d gelijk is aan de parameter p, bekend uit de vgl. $y^2 = 2px$, zodat uit de coëfficiënten van iedere paraboolvergelijking terstond de grootte van $p (= d)$ te berekenen is.

Nadat wij zoëven de grootterelatie tussen de coëfficiënten van de vgl. $f(x, y) = 0$ en (1) hebben aangegeven zullen wij nog een laatste illustratie geven van het hechte verband tussen de invarianten, hetzij, behorend tot de gebruikelijke kwadratische vergelijking, òf die wij hier invoerden als W^*, D^* en H^*.

Evenals wij de vergelijking $f(x, y) = 0$ kunnen omzetten tot de z.g. middelpuntsvergelijking, kunnen wij dat met vergelijking (1) doen. Uiteraard is hierbij $D^* \neq 0$. Deze vergelijking krijgt nù de vorm $S_1{}^* x^2 + S_2{}^* y^2 = -H^*/D^* = \dfrac{d^2e^2}{1 - e^2}$, waarin S^*_1 en $S_2{}^*$ de wortels zijn van $(S^*)^2 - W^* S^* + D^* = (S^*)^2 + (e^2 - 2) S^* + (1 - e^2) = (S^* - 1)\{S^* - (1 - e^2)\} = 0$.

Uit de schrijfwijze

$$\frac{x^2}{d^2e^2/S_1{}^*(1 - e^2)} + \frac{y^2}{d^2e^2/S_2{}^*(1 - e^2)} = 1$$

blijkt, dat we moeten nemen:

voor de ellips ($D > 0$, d.w.z. $e < 1$): $0 < S_1^* = 1 - e^2 < S_2^* = 1$,
en
voor de hyperbool ($D < 0$, d.w.z. $1 < e$): $S_1^* = 1 - e^2 < 0 < S_2^* = 1$,
dus steeds

$$\frac{x^2}{d^2e^2/(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{d^2e^2/1-e^2} = 1.$$

(Verschil der noemers $= c^2$, indien $c = e^2|e^2-1|^{-1}.d$).

Het hechte verband, op zichzelf al een invariantie die wèl absoluut is, blijkt nu uit:

$$\frac{-H}{DS_i} = -\frac{S^3H^*}{(S^2D^*)\cdot(SS_i^*)} = -\frac{H^*}{D^*S_i^*}. \qquad (i = 1, 2).$$

Om in te zien dat bij transformatie van het assenkruis de grootheden W, D en H der resulterende vergelijking invariant zijn, behoeven we dit feit slechts te constateren voor het eenvoudigste geval, nl. de lineaire invariant W. Dit, gekoppeld aan onze voorgaande beschouwingen, doet ons de juistheid ervan inzien.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Mathematica & Paedagogia* (IX, 24, 1963).

R. Holvoet, Vecteurs propres d'une transformation linéaire;

Rapport van de Commissie voor elementaire wiskunde van de Vrije Universiteit te Brussel;

J. Roch, Un chapitre d'arithmétique en sixième;

R. Broeckx, Alle formules van driehoeksmeting kunnen op eenvoudige en eenvormige wijze bewezen worden;

N. Vandenbogaert-Rombouts, Les groupes de déplacements du tétraèdre et du cube;

R. Broeckx, Een groep van transformaties in boldriehoeksmeting;

E. Larimier, La méthode de problèmes-centres dans l'enseignement de la géométrie démontrée;

R. Broeckx, ,,Vergeten'' belangrijke veeltermen;

W. Servais, Programma van de 17e bijeenkomst van de Commission Internationale pour l'étude et l'amélioriation de l'enseignement des mathématiques te Digne (Fr.);

Verslagen van de Studieweken te Utrecht en te Groningen in januari 1961

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLII, 231, *mai-juin* 1963).

R. Esteve, Essai de généralisation sur des questions de minimum absolu;

A. Donedu, Nombres réels;

G. Guitel, Un exemple de présentation géométrique en analyse combinatoire;
P. Jacquemier, L'enseignement des mathématiques et la télévision;
M. Chazal, Deux exercices sur le barycentre;
G. Walusinski, La règle de trois n'aura pas lieu;
J. Kuntzmann, Les besoins des hommes en mathématiques appliquées et de l'automatisme;
L. Gauthier, Rapport sur le concours 1962 de l'aggrégation masculine.

3. *Praxis der Mathematik* (V, 4, April 1963).

H. Lenz, A bas Euclide - vive Bourbaki?
H. Griesel, Zum Hauptsatz über Parallelogramme;
J. Saxler, Ebene Schnitte durch Rotationskörper;
O. Klein, Kegelschnitttangenten - einmal anders;
H. Hürten, Vektoren propädeutisch in Sexta;
H. Jehle, Polynom-Nullstellen mit dem Rechenstab;
W. Hartkopf, Georg Polyas Werk zur Heuristik;
W. L. Fisher, Neues mathematisches Institut in Erlangen.

Praxis der Mathematik (V, 5, Mai 1963).

I. Paasche, Die vierte Dreiecksseite;
B. Raussen, Kreis und Kugel vektoriel;
H. Dücker, Zur Einführung der Exponentfunktion;
H. Uchtmaan, Zur Lösung Kubischer Gleichungen;
W. Zirkel, Das Ankreisviereck.

Praxis der Mathematik (V, 6, Juni 1963).

H. Heise, Funktionales Denken im Physikunterricht;
J. Lauter, Das dx beim Integral;
E. G. Schiller, Geradenbüschel in der analytischen Geometrie;
H. Zeitler, Über extremale Teiler und Vielfläche;
W. L. Fischer, Mengentheoretische Topologie II;
G. Müller, Addition und Substraktion in Untertertia;
M. Hastad, Modernisierung der Schulmathematik in Skandinavien.

Nieuwe rubriek: Gedankensplitter. Voorbeeld:

„Axiomatik - das ist Bürokratie auch in der Mathematik".

Könnte von Parkinson sein!

„Die Herrschaft des Büros ist eine Zeiterscheinung.
Warum sollte die Mathematik davon verschont bleiben?"

Ein Zeitdeuter (Philosoph).

Praxis der Mathematik (V, 7, Juli 1963).

H. Zeitler, Die Grundlagen der Geometrie;
R. Wolff, Kegelschnitte am hexagonalen Bleistift;
O. Becker, Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden III;
Kl. Wigand, Kosinus oder Cosinus?
W. D. Meisel, Bausteine des Programmierens;
S. Filippi, Relaxationsrechnung;
W. Götz, Aufgaben über Dreiecksscharen;
W. L. Fischer, Erlanger Zusammenkünfte.

4. *Elemente der Mathematik* (XVIII, 3, Mai 1963).

P. Scherk, Über Summen von Mengen natürlicher Zahlen;
W. Sierpinski, Trois nombres tétraédraux en progression arithmétique;
G. D. Chakerian, On the diameter and triameter of a convex body;
G. Szász, Über der normale Axonometrie.

Elemente der Mathematik (XVIII, 4, Juli 1963).

W. Wunderlich, Zwei instruktive Trugschlüsse;
W. Sierpinski, Sur une propriété des progressions arithmétiques;
A. Rotkiewicz, Remarque sur les nombres parfaits de la forme $a^n \pm b^n$.;
S. Filippi, Kleine Einfürung in die Monte-Carlo-Methode;
J. Strommer, Bemerkung zur elementaren Kegelschnittlehre;
R. Bereis, Adjungierte Geraden eines Kreiszwillings.

5. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XVI, 1, Mai 1963).

E. Hunger, Die verschiedenen Strömungen des Mathematikunterrichtes im Hinblick auf die Neugestaltung der Oberstufe;
H. Meschkowski, Der Funktionsbegriff in der modernen Mathematik.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVI, 2, Juni, 1963).

E. Teuffel, Rationale Punkte auf der Quadratwurzelschneckke;
H. Nickelsen, Die Gruppe der automorphen Kollineationen einer Kegelschnitte;
Verslag van de 54e algemene vergadering des deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, april 1963, te Kiel.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVI, 3, Juli 1963).

H. B. Bigalke, Zur Struktur der Menge der natürlichen Zahlen;
A. Kester, Über eine Anwendung der Vektorrechnung auf die Transformationen der Kegelschnittgleichung;
C. Simon, Eine neue Näherungslösung der ,,Quadratur des Kreises";
W. Ness, Die Konservendoseaufgabe ohne Infinitesimalrechnung;
H. Besuden, Über vollkommene und perfekte Zahlen.

6. *School Science and Mathematics* (LXIII, 4, 555, April 1963).

D. R. Byrkit, The square root of i;
P. C. Burns, An exploratory use of the three meanings of "the average".

School Science and Mathematics (LXIII, 5, 556, May 1963).

Cecil B. Read, The naming of large numbers;
H. R. Pottorff, Fundamental ideas of space travel;
E. H. Harwoord, Enrichment for all;
J. Landin, The secondary new mathematics curriculum and the new teacher;
E. P. Odescalchi, Mathematics in Western thought.

School Science and Mathematics (LXIII, 6, 557, Juli 1963).

Cecil B. Read, Some mathematical textbooks of the late 18th century;
B. J. Brown, Logic and logic currents;
B. J. Brown, Testing statements for validity;
M. F. Willerding, Infinity and its presentation at the high school level.

7. *The Mathematics Teacher* (LVI, 4, April 1964).

I. Wirszup, The school mathematics circle and olympiads at Moscow State University;

J. Henkelman, Implementing a new mathematics curriculum;

J. F. Santner, A note on curve fitting;

A. Forges, The linear equation and absolute values;

J. E. Forbes, Programmed instructional materials — past, present and future;

M. Jerison, Natural bases of logarithms;

J. W. Beach, Aids in understanding proof by mathematical induction;

R. H. Simpson, Mathematics teachers and self-evaluating procedures;

G. L. Henderson, An independent classroom experiment using teaching machine programmed materials;

D. J. Struik, The origin of l'Hôpital's rule.

The Mathematics Teacher (LVI, 5, May 1963).

R. J. Troyer, An approach to vector geometry;

E. Pierson, Junior high school mathematics and the computer;

Cl. Bell, What every teacher should know about the uses of mathematics;

J. F. Santner, A second note on curve fitting;

W. A. Dodd, A new qualification for mathematics teachers in the United Kingdom;

L. M. Salzarulo, Using vectors to solve simultaneous equations;

K. P. Wildermuth, Application of the cosine function;

N. C. Scholomiti and R. G. Hill, A triangle construction;

A. L. Wright, Application of combinations and mathematical induction to a geometry lesson;

L. A. Ringenberg, The area of a rectangle;

L. Whitacre, Computer programming for high school sophomores;

D. E. Varberg, The development of modern statistics.

BOEKBESPREKING

Robert A. Carman, *A Programmed Introduction to Vectors*, John Wiley and Sons, Inc., New York-London, 1963, 120 blz., prijs 21/—.

In dit boekje vindt men alleen de allereerste begrippen van de vectorrekening ($A + B, A \cdot B, A \times B, A \cdot B \times C, |A|$, wat volgt uit $A \times B = 0$?)

Het merkwaardige van dit boekje is de behandelingswijze. Deel I begint op blz. 9A. Hierop staan drie korte mededelingen en één vraag met vier keuze-mogelijkheden voor het antwoord. Kiest men *a*, dan wordt men verzocht op blz. 11B de beoordeling op te zoeken, men leest dan: Uw antwoord is niet juist, want . . ., lees opnieuw blz. 9A. Het antwoord op keuze *b* staat beoordeeld op blz. 3A, dat op *c* op blz. 14A en op *d* tenslotte op blz. 16A. Het is zelfs aan te bevelen alle keuzen te onderzoeken, ook nadat een goede keuze gemaakt is, al is het alleen maar, om te weten waar nu het vervolg te vinden is.

Bestudering van deze elementaire begrippen dwingt dus tot een heen en weer bladeren, maar met ,,vallen en opstaan'' wordt men verder geleid.

Een aardig boekje om als wiskundeprijs te dienen in b.v. een 4de klas gymnasium.

Burgers

OVER VIERHOEKEN MET AANGESCHREVEN VIERKANTEN

door

Dr. J. T. GROENMAN

Groningen

a. In een nummer van Praxis der Mathematik [1]) trof ik het volgende vraagstuk aan: *ABCD is een parallellogram.* Op elke zijde is een vierkant gezet, dat die zijde als zijde heeft (buitenwaarts).

Dan zijn de middelpunten der vier vierkanten de hoekpunten van een vierkant.

De oplossing van dit vraagstuk volgt nog.

b. Het vraagstuk kan als volgt worden gegeneraliseerd.

ABCD is een willekeurige vierhoek. Op elke zijde zet men buitenwaarts een vierkant, dat die zijde als zijde heeft.

Welke bijzonderheden vertoont de vierhoek, gevormd door de middelpunten P, Q, R en S der vierkanten?

De volgende oplossing is mij welwillend afgestaan.

U is het midden van AC. Dan is $UP \,//\, AD_2$ en $UP = \frac{1}{2}AD_2$.
Evenzo $SU \,//\, CD_1$ en $SU = \frac{1}{2}CD_1$.

$\triangle DD_1C$ ontstaat uit $\triangle DAD_2$ door een pos. draaiing over 90° (*zhz*).

$$\therefore\ D_1C \perp AD_2 \text{ en } D_1C = AD_2$$
$$SU \perp PU \text{ en } SU = PU$$

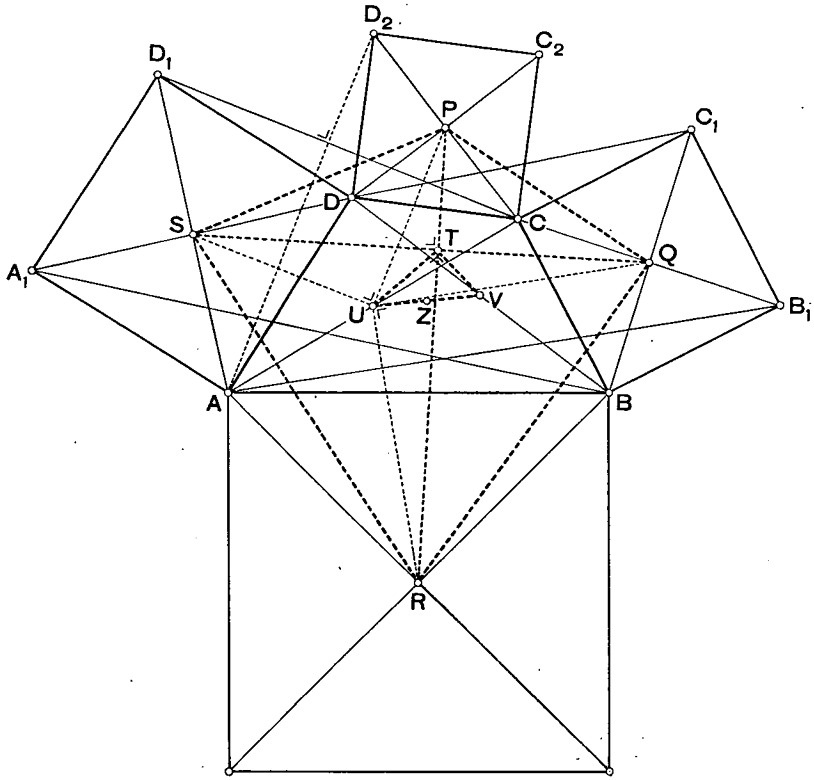
Evenzo $$RU \perp QU \text{ en } RU = QU$$

$\triangle QUS$ ontstaat uit $\triangle RUP$ door een neg. draaiing over 90° (*zhz*)

$$\boxed{PR \perp QS} \text{ en } \boxed{\overline{PR} = \overline{QS}.}$$

$\therefore$ $PQRS$ wordt dus een vierhoek, waarvan de middens der vier zijden de hoekpunten zijn van een vierkant.

[1]) *Praxis der Mathematik*, **5**, jan. **1963**, p. **17** (vraagstuk **15**).



Bovendien ligt U evenver van PR en QS. Dat geldt ook voor V (midden BD). U en V liggen dus op de bissectrices van de rechte hoeken bij T;

$$\therefore \boxed{UT \perp VT}$$

Opm.: Past men deze methode toe op een parallellogram $ABCD$, dan vallen U, V en T samen en bewijst men gemakkelijk, dat $PQRS$ rechte hoeken bezit en dus een vierkant is.

c. Wij geven nog een analytisch bewijs:

$$A(2a_1;\ 2a_2). \quad B(2b_1;\ 2b_2). \quad C(2c_1;\ 2c_2). \quad D(2d_1;\ 2d_2).$$

De coördinaten van P, Q, R en S zijn dan resp.

$$P[(c_1 - c_2) + (d_1 + d_2);\ (c_1 + c_2) - (d_1 - d_2)]$$
$$Q[(b_1 - b_2) + (c_1 + c_2);\ (b_1 + b_2) - (c_1 - c_2)]$$
$$R[(a_1 - a_2) + (b_1 + b_2);\ (a_1 + a_2) - (b_1 - b_2)]$$
$$S[(d_1 - d_2) + (a_1 + a_2);\ (d_1 + d_2) - (a_1 - a_2)].$$

Vector $\overrightarrow{PR}$ heeft als componenten

$$(a_1 - a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 - c_2) - (d_1 + d_2)$$

en

$$(a_1 + a_2) - (b_1 - b_2) - (c_1 + c_2) + (d_1 - d_2)$$

Vector $\overrightarrow{QS}$ heeft als componenten

$$(a_1 + a_2) - (b_1 - b_2) - (c_1 + c_2) + (d_1 - d_2)$$

en

$$-(a_1 - a_2) - (b_1 + b_2) + (c_1 - c_2) + (d_1 + d_2).$$

$$PR_x = -QS_y \text{ en } PR_y = QS_x.$$

Dat betekent dat $\boxed{\overline{PR} = \overline{QS}}$ en $\boxed{PR \perp QS}$

d. De noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat $PQRS$ een vierkant is luidt: de middens van PR en QS vallen samen

$$\therefore (a_1 - a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 - c_2) + (d_1 + d_2)$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 + c_2) + (d_1 - d_2)$$
$$\text{en } (a_1 + a_2) - (b_1 - b_2) + (c_1 + c_2) - (d_1 - d_2)$$
$$= -(a_1 - a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 - c_2) + (d_1 + d_2)$$

waaruit:

$$b_2 + d_2 = a_2 + c_2$$
$$b_1 + d_1 = a_1 + c_1.$$

De middens van BD en AC vallen dus samen; *$ABCD$ is een parallellogram.*

e. We kunnen nu vragen naar tussenstadia. Bv: Welke bijzonderheden heeft $ABCD$, als $PQRS$ een vlieger zal zijn? (Uiteraard met gelijke diagonalen). Om het rekenwerk te beperken stellen wij

$$a_1 = -1,\ a_2 = 0;\ b_1 = 1,\ b_2 = 0$$

$$A(-2, 0)\ B(2; 0)\ C(2c_1; 2c_2)\ D(2d_1; 2d_2)$$
$$P[(c_1 - c_2) + (d_1 + d_2); (c_1 + c_2) - (d_1 - d_2)]$$
$$Q[1 + (c_1 + c_2); 1 - (c_1 - c_2)]$$
$$R[0; -2]$$
$$S[-1 + (d_1 - d_2); 1 + (d_1 + d_2)]$$
$$A_1[-2 - 2d_2; 2 + 2d_1] \text{ en } B_1[2 + 2c_2; 2 - 2c_1].$$

Wij stellen nu $RS = RQ$.

$$[-1 + (d_1 - d_2)]^2 + [3 + (d_1 + d_2)]^2$$
$$= [1 + (c_1 + c_2)]^2 + [3 - (c_1 - c_2)]^2$$

$$2d_1{}^2 + 2d_2{}^2 + 4d_1 + 8d_2 + 10 = 2c_1{}^2 + 2c_2{}^2 - 4c_1 + 8c_2 + 10. \quad (1)$$

Deze voorwaarde is dezelfde als $A_1B = AB_1$:

$$[4 + 2d_2]^2 + [2 + 2d_1]^2 = [4 + 2c_2]^2 + [2 - 2c_1]^2$$
$$4d_1{}^2 + 4d_2{}^2 + 8d_1 + 16d_2 + 20 = 4c_1{}^2 + 4c_2{}^2 - 8c_1 + 16c_2 + 20. \quad (2)$$

(1) en (2): de zelfde vergelijking

Is dus $A_1B = AB_1$, dan volgt daaruit $RS = RQ$, $PS = PQ$ en $CD_1 = C_1D$.

f. Het „zwaartepunt" van $ABCD$ heeft de coördinaten (zie *c*):

$$Z[\tfrac{1}{2}(a_1 + b_1 + c_1 + d_1);\ \tfrac{1}{2}(a_2 + b_2 + c_2 + d_2)].$$

Uit *c* volgt dat het „zwaartepunt" van $PQRS$ dezelfde coördinaten heeft. De „zwaartepunten" van beide vierhoeken vallen derhalve samen in het midden Z van UV.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

101. Op 8-6-'62 kon men in de krant het volgende bericht lezen. De eindstanden van de competities voor het wereldkampioenschap voetbal zijn:

Groep I						
West-Duitsland	3	2	1	0	5	4–1
Chili	3	2	0	1	4	5–3
Italië	3	1	1	1	3	3–2
Zwitserland	3	0	0	3	0	2–8
Groep II						
Brazilië	3	2	1	0	5	4–1
Tsjechoslowakije	3	1	1	1	3	2–3
Mexico	3	1	0	2	2	3–4
Spanje	3	1	0	2	2	2–3

De laatste wedstrijd werd door Italië gewonnen met 3–0, terwijl Mexico in de laatste wedstrijd 3 doelpunten scoorde. Wordt gevraagd de volledige lijst met uitslagen uit deze beide competities.

102. Men heeft een stel van n gewichten van 1, 2, 3, . . ., n gram. Men kan hiermee verschillende wegingen verrichten, waarbij de gewichten slechts op één van de beide schalen geplaatst worden. Twee wegingen rekenen we als verschillend, als niet alle gebruikte gewichten dezelfde zijn. B.v. $1 + 2 + 3$, $1 + 5$, $2 + 4 + 7$, 13, $1 + 12$, enz. Druk de som van de totalen van de verschillende wegingen in n uit.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

98. Bijvoorbeeld: $3 = -{}^2\log {}^2\log\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$.

Algemeen: $n = -{}^2\log {}^2\log\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}$ (n worteltekens).

99. Het grootste verschil komt tweemaal voor, nl.

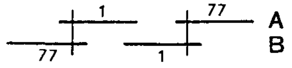
8901234567		1203456789
8796543210 —	en	1098765432 —
104691357		104691357

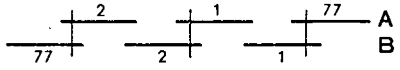
100. Dat het mogelijk is bewijzen we als volgt. Onderstel, dat het maximale aantal spijkers, waardoor een aantal stukken van de bovenste puzzel A en een aantal stukken van de onderste puzzel B elk éénmaal doorboord kunnen worden, r is en dat $r < n$. Voor het gemak stellen we, dat $n = 100$ en $r = 76$. We nummeren de stukken van beide puzzels 1 tot en met 100 op zodanige manier, dat 1 van A vastgespijkerd is aan 1 van B, 2 van A aan 2 van B, enz. De niet vastgespijkerde stukken 77 tot en met 100 van A bevinden zich nu geheel boven de stukken 1 tot en met 76 van B.

Stuk 77 van A bevindt zich dus deels boven b.v. stuk 1 van B. Dan bevindt stuk 1 van A zich deels boven stuk 1 van B en deels boven een ander stuk van B. Laat dit stuk 77 zijn. Dan kunnen we de spijker door de beide stukken 1 laten vervallen en vervangen door twee spijkers, zoals in de linker figuur is aangegeven. Het aantal vastgespijkerde stukken is nu van 76 op 77 gebracht, in strijd met de onderstelling, dat 76 het maximum is. Dus bevindt 1 van A zich geheel boven de stukken 1 tot en met 76 van B.

Dan bevindt 1 van A zich deels boven b.v. stuk 2 van B en dus 2 van A zich deels b.v. boven 77 van A. Weer kunnen we nu twee spijkers laten vervallen en drie nieuwe spijkers erbij slaan, waardoor het aantal van 76 op 77 gebracht wordt. Ook stuk 2 van A bevindt zich geheel boven de stukken 1 tot en met 76 van B. Enz.

Het is echter niet mogelijk, dat de stukken 1 tot en met 76 van A zich geheel boven de stukken 1 tot en met 76 van B bevinden, omdat dit ook reeds het geval is met de stukken 77 tot en met 100 van A. De hypothese $r < n$ leidt dus tot een strijdigheid. Hiermee is de bewering bewezen.





WIMECOS

ALGEMENE VERGADERING op *vrijdag* 27 *december* 1963 in „*Esplanade*", *Lucas Bolwerk, Utrecht*. Aanvang 10.30 uur. Voor de agenda zie men het novembernummer (Blz. 92).

CONTRIBUTIE

Op de binnenzijde van de omslag van *elk* EUCLIDES-nummer staat o.a. te lezen: „Leden van Wimecos betalen aan het begin van het verenigingsjaar *f* 8,00 als contributie (tevens abonnementsgeld op Euclides)".

Elk jaar blijkt dat vele leden deze bepaling niet kennen. Wilt u even nakijken of u al gireerde? Is dit niet het geval, maak dan deze week nog *f* 8,00 over op postrekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam. De penningmeester dankt u bij voorbaat.

Redactieverslag 38e jaargang van EUCLIDES

Aan de Besturen van Wimecos,
Liwenagel en de Wiskundewerkgroep
van de W.V.O.

Doordat EUCLIDES ook orgaan is geworden van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. kon in de loop van de 38e jaargang Dr. P. M. van Hiele als nieuw redactielid welkom worden geheten.

Deze jaargang heeft de normale omvang van 320 pagina's, die in 10 nummers, waaronder een dubbelnummer, verschenen. Twee nummers werden gecombineerd om de belangrijke verslagen van de rapporten uitgebracht voor het internationale congres te Stockholm tegelijk te kunnen brengen.

Inzenders van artikelen wordt er op gewezen, dat de tijd, die er verloopt tussen inzending en publikatie vaak lang kan zijn, omdat actuele rapporten, teksten van voordrachten e.d. voorrang krijgen. Uiteraard zullen bovendien artikelen van didactisch belang boven andere verkozen worden. Voorrang zal ooo worden verleend aan artikelen over moderne wiskunde voor zover ze van belang zijn voor de schoolwiskunde.

De samenwerking met de uitgever liet ook dit jaar niets te wensen over.

16 november 1963 — Namens de redactie

De voorzitter, W. G. Joh. H. Wansink — De secretaris, A. M. Koldijk

BOEKBESPREKING

P. Wijdenes, *Beknopte analytische meetkunde*, P. Noordhoff N.V., Groningen, *f* 4.75.

Dit boek behandelt de analytische meetkunde in overeenstemming met het nieuwe leerplan. Uiteraard heb ik het niet in de les kunnen gebruiken, maar bij het ,,erin neuzen'', bleek me dat de behandeling is zoals we dat van deze schrijver mogen verwachten: degelijk en helder. Het geeft de stof in royale omvang. De figuren zijn bijzonder duidelijk. Het boek bevat veel uitgewerkte vraagstukken als voorbeelden en veel opgaven.

Niet zo heel duidelijk vind ik de behandeling van de afstand van een punt tot een rechte lijn enz. op blz. 18.

Op bladzijde 19 staat kennelijk een drukfout: in regel 10 van boven zal moeten staan: ,,op $-9x - 13y + 41 = 0$'', i.p.v. ,,of $-9x - 3y + 41 = 0$''.

J. F. Hufferman

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

Het Wiskundig genootschap zal op vrijdag 3 januari 1964 in samenwerking met het Belgisch Wiskundig Genootschap een vergadering houden in *Rotterdam*, in het *Groothandelsgebouw*, Stationsplein om 10.30 uur.
Sprekers zullen zijn:
Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen: *Elementaire inleiding in de theorie der distributies*
Prof. Dr. D. J. Struyk: *De oude Chinese wiskunde*
Prof. Dr. G. Hirsch (Brussel): *Homotopie en Homologie*
Prof. Dr. J. Deprit (Leuven): over een nader te bepalen onderwerp.

Deelnemers gelieven dit, zo mogelijk, van te voren op te geven.
Er is gelegenheid aan een maaltijd deel te nemen. De kosten à *f* 3,80 dienen vóór 20 dec. gestort te worden op postrekening 180426 t.n.v. Drs. H. Pleysier, Nobelstraat 105B, Rotterdam-4.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Actualiteiten*" in „Krasnapolsky", Warmoesstraat 173—199, Amsterdam op zaterdag 25 januari 1964:

Drs. M. A. Maurice, onderwerp nog onbekend. Aanvang 14.00 uur.

AVONDCOLLEGES VOOR LERAREN 1963/64

Evenals vorige jaren zal de Utrechtse Sterrenwacht ook in dit seizoen een

LERARENCURSUS STERRENKUNDE

organiseren. De cursus zal gehouden worden op 4 achtereenvolgende donderdagavonden, te beginnen donderdag 23 januari 1964 in het Universiteitsgebouw, Zaal 9, Domplein 29, Utrecht.

De voordrachten beginnen iedere avond om 19.30 uur en duren tot 21.15 uur Als onderwerp is voor dit jaar gekozen:

Het Melkwegstelsel

Sprekers:
Prof. Dr. A. Blaauw: 23 januari 1964;
Algemeen overzicht van huidige problemen en werkwijzen.
Dr. E. Raimond: 30 januari 1964;
De spiraalstructuur van het Melkwegstelsel, afgeleid uit waarnemingen van de 21-cm lijn.
Dr. L. Plaut: 6 februari 1964.
De veranderlijke sterren en hun betekenis voor het onderzoek van de Melkweg.
Drs. G. W. Rougoor: 13 februari 1964;
De kern van het Melkwegstelsel.

Aan de deelname zijn geen kosten verbonden. Pogingen worden in het werk gesteld om reiskosten boven *f* 2.50 aan de deelnemende leraren te vergoeden. Men geve zich voor deelname op aan de Administratie van de Sterrenwacht, Zonnenburg 2, Utrecht.

Het adres van de redactiesecretaris is gewijzigd in:

A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand